Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi

Afyon Kocatepe University Journal of Science and Engineering

AKÜ FEMÜBİD **21** (2021) 021302 (273-282)

AKU J. Sci. Eng. **21** (2021) 021302 (273-282)

DOI: 10.35414/akufemubid.803443

Araştırma Makalesi / Research Article

Sönümlemeli Sistemlerin Eşlenmesi Üzerine

Oğul ESEN[1], Gökhan ÖZCAN[2*], Serkan SÜTLÜ[3]

[1,2] *Gebze Teknik Üniversitesi, Temel Bilimler Fakültesi, Matematik Bölümü, Gebze, Kocaeli.*

[3] *Işık Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Şile, İstanbul.*

Sorumlu Yazar

[1] *e-posta: oesen@gtu.edu.tr. ORCID ID: http://orcid.org/0000-0002-6766-0287*

[2] *e-posta: gokhanozcan@gtu.edu.tr. ORCID ID: http://orcid.org/0000-0001-6260-4641*

[3] *e-posta: serkan.sutlu@isikun.edu.tr. ORCID ID: http://orcid.org/0000-0003-0925-8668*

Geliş Tarihi: 01.10.2020 Kabul Tarihi: 10.03.2021

Anahtar kelimeler
Eşlenmiş Lie cebirleri; Metriplektik sistemler; Rayleigh sönümlemesi; Cartan–Killing metriği

Öz

Bu makalede karşılıklı etki tepki içindeki iki sönümlemeli sistemin beraber (kollektif- eşlenmiş) hareketinin analizi üzerine bir yöntem öneriyoruz. Aşikardır ki; eşlenmiş hareketi kontrol eden diferansiyel denklemler iki sistemin denklemlerini bir arada yazmak dışında karşılıklı etki tepkinin doğurduğu fazladan terimler içerecektir. Karşılıklı etkiyi belirleyen ilave terimler, Lie cebirlerinin karşılıklı etkisi ile üretilecektir ve bu şekilde pür geometrik/cebirsel bir inşa gerçekleştirilecektir. Sonrasında elde ettiğimiz sonuçları 3 ve 4 boyutlu örneklerde göstereceğiz.

On Matched Pair of Dissipation Systems

Keywords
Matched Lie Algebras; Metriplectic Systems; Rayleigh Dİssipation; Cartan-Killing metric

Abstract

In this work we propose a method to analyse the collective motion of two mutually interacting dissipative systems. It is obvious that; the differential equations controlling the matched motion will include extra terms generated by the mutual interactions, apart from writing the equations of the two systems together. These additional terms will be produced in this work by the mutual actions of Lie algebras, and in this way a pure geometric / algebraic construction will be realized. We shall then illustrate our results on 3 and 4 dimensional examples.

1. Giriş

Hamilton sistemler için dinamik, bir Poisson çerçevesi ve Hamilton fonksiyonu vasıtasıyla tanımlanır. Klasik modellerde Hamilton fonksiyonu toplam enerji olarak ifade edilir ve Poisson çerçevesinin ters simetri özelliği nedeniyle hareket boyunca korunur. Bu özellik bize tersinir bir hareket sunar.

Tersinir olmayan, özellikle de entropinin arttığı denge durumundan uzak termodinamik sistemler için, Hamilton formülasyonu tek başına sistemin geometrizasyonu için yeterli değildir. Literatürde bu tip tersinir olmayan sistemlerin geometrik analizi için GENERIC formülasyonu mevcuttur (Grmela 1984a, Grmela 1984b, Grmela and Öttinger 1997, Pavelka et al. 2018). GENERIC, "General Equation for Non-Equilibrium Reversible-Irreversible Coupling" baş harflerinden oluşur. Bu geometrik yapı, metriplektik adıyla daha özel bir gösterime de sahiptir (Kaufman 1984, Morrison 1984). Tersinir olmayan, sönümleme terimleri, Poisson çerçevesi ile belirli uyumluluk şartları sağlayan bir simetrik çerçeve marifetiyle belirlenir (Mielke 2011). Detaylarına metnin içinde değinilecek olan bu yapıda özetle Poisson çerçevesi tersinir hareketi belirlerken, simetrik çerçeve ise sönümlemeyi belirler.

Bu çalışmamızda karşılıklı etki içindeki iki sönümlemeli sistemin eşlenmesi problemine bazı cevaplar üretmeye çalışacağız. Aşikardır ki; karşılıklı etki içindeki iki sistemin ortak hareketinde, bütünü oluşturan parçalar bireysel hareketlerini sürdüremeyecektir. Hareketi kontrol eden diferansiyel denklemler de iki sistemin denklemlerini bir arada yazmak dışında karşılıklı etkinin doğurduğu fazladan terimler içerecektir.

Karşılıklı etki tepki içindeki Lie-Poisson formunda verilen, sönümleme içermeyen, iki Hamilton sistemi için eşlenme problemi (Esen ve Sütlü 2016) çalışmamızda gösterilmişti. Bu makalede karşılıklı etki içindeki (Rayleigh tipi ve Cartan-Killing *metriği* tarafından belirlenen) iki sönümlemeli sistemin beraber (kolektif-eşlenmiş) hareketini kontrol eden dinamik denklemler elde edilecektir. Elde edilen teorik sonuçlar ise 3 ve 4 boyutlu sönümlemeli sistem örnekleri üzerinde çalışılacaktır. Benzer yönde çalışmalarımızı da not edelim. Karşılıklı etki içindeki iki sistemin Euler-Poincaré formülasyonu (Esen ve Sütlü 2017) adlı çalışmada, yüksek mertebeden eşlenmiş Euler-Poincaré denklemi (Esen vd. 2021), kesikli sistemlerde analiz için (Esen ve Sütlü 2021) kaynağını öneriyoruz.

2. Materyal ve Metot

Temel çıkış noktamız olan beraber (kolektif-eşlenmiş) hareket için karşılıklı etki, eşlenmiş Lie cebirleri marifetiyle elde edilecektir. Eşlenmiş bir Lie cebirleri, kesişimleri aşikâr iki alt cebirinin toplamı olarak elde edilebilen cebirlerdir. Ve fakat bütün cebir üzerindeki Lie çerçevesi bireysel çerçevelerin toplamı dışında karşılıklı etkiyi belirleyen ilave terimleri ihtiva etmekte ve bu anlamda aradığımız geometrik yapıyı bize sunmaktadır. Bu, dual uzay üzerinde geometrik olarak Lie-Poisson çerçevesinin, fiziksel sistem için tersinir hareketin, eşlenmesine olanak verir. Sönümleme için ise tekrar eşlenmiş Lie cebiri yapısına başvuracağız. Bu amaç doğrultusunda koadjoint temsil ve Cartan-Killing simetrik çerçevesi kullanacağız. Sonuç itibariyle seçilen Rayleigh sönümlemeleri ve Cartan-Killing *metriği* için eşlenmiş metriplektik sistemlere ulaşılacağız.

3. Hamilton Dinamiği ve GENERIC (Metriplektik) Sistemler

3.1 Poisson Katmanı ve Hamilton Denklemleri

Bir $(P,\{\bullet,\bullet\})$ Poisson katmanını göz önüne alalım (de León and Rodrigues 2011, Marsden and Ratiu 2013). Burada $\{\bullet,\bullet\}$ notasyonu, P katmanı üzerindeki reel değerli türevlenebilir fonksiyonlar için tanımlı, Jacobi ve Leibniz eşitliklerini sağlayan bir Poisson çerçevesidir. Rasgele seçilen üç fonksiyon $\mathcal{F},\mathcal{G}$ ve $\mathcal{H}$ için Leibniz özdeşliği:

$$\{\mathcal{F}\mathcal{G},\mathcal{H}\}=\mathcal{F}\{\mathcal{G},\mathcal{H}\}+\{\mathcal{F},\mathcal{H}\}\mathcal{G},$$

olarak ve Jacobi özdeşliği

$$\big\{\mathcal{F},\{\mathcal{G},\mathcal{H}\}\big\}+\big\{\mathcal{G},\{\mathcal{H},\mathcal{F}\}\big\}+\big\{\mathcal{H},\{\mathcal{F},\mathcal{G}\}\big\}=0$$

şeklinde tanımlanır. Leibniz özdeşliğinin yardımı ile, bir Poisson çerçevesi için, iki vektör alanı Λ'yı aşağıdaki gibi tanımlarız:

$$\Lambda(\mathrm{d}\mathcal{F},\mathrm{d}\mathcal{H}):=\{\mathcal{F},\mathcal{H}\}\,.$$

Burada $\mathrm{d}\mathcal{F}$ ve $\mathrm{d}\mathcal{H}$ de Rham dış türevlerini temsil etmektedir. Eğer Poisson çerçevesi yozlaşmış ise, diğer bir ifade ile tüm $\mathcal{F}$ fonksiyonları için $\{\mathcal{F},\mathcal{C}\}=0$ şartını sağlayan sabit olmayan bir $\mathcal{C}$ fonksiyonu var ise bu fonksiyon Casimir fonksiyonu olarak adlandırılır. Eğer böyle bir $\mathcal{C}$ fonksiyonu bulunamıyorsa Poisson çerçevesine yozlaşmamış denir. P üzerinde seçilen bir Hamilton fonksiyonu için Hamilton denklemleri, $\mathbf{z}\in P$ olmak üzere, $\dot{\mathbf{z}}=\{\mathbf{z},\mathcal{H}\}$ şeklinde tanımlanır. Burada bir $\mathcal{F}$ fonksiyonu için değişim ise $\dot{\mathcal{F}}=\{\mathcal{F},\mathcal{H}\}$ olarak belirlenir. Poisson çerçevesinin ters simetri özelliği Hamilton fonksiyonunun hareket boyunca korunduğunu $\dot{\mathcal{H}}=0$ gerçeklemektedir. Klasik sistemlerde Hamilton fonksiyonu toplam enerji olarak alındığından, bu özelliğe enerjinin korunumu demek de mümkündür.

P katmanının bir noktası $\mathbf{z}$ olsun ve bu nokta çevresindeki yerel koordinatları $\{z_i\}$ şeklinde kabul edelim. Bu durumda Poisson iki-vektör Λ_{ij} katsayı fonksiyonları tarafından ifade edilebilirler. Doğal olarak bu ifade Poisson çerçevesini

$$\{\mathcal{F},\mathcal{H}\}=\Lambda_{ij}\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial z_i}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial z_j} \tag{1}$$

şeklinde belirler. Burada indisler 1 den N'e kadar değişecek şekildedir. Burada ve tüm makale boyunca Einstein toplama uylaşımı kullanılmaktadır. Bu uylaşım gereği denklemin sağ tarafındaki alt ve üst indisler üzerindeki i ve j endislerinin tekrarı, bu indisler üzerinde 1 den N'e kadar toplam olduğunu söyler (Şuhubi 2008). Dolasıyla, Hamilton fonksiyonu $\mathcal{H}$ tarafından üretilen hareket denklemleri

$$\dot{z}_i = \Lambda_{ij} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z_j} \tag{2}$$

halini alır.

3.2 Lie-Poisson Yapısı

Bir Lie cebiri $(\mathfrak{K}, [\bullet,\bullet])$ alalım. Bu Lie cebirinin dual uzayı $(\mathfrak{K}^*, \{\bullet,\bullet\})$ bir Poisson katmanıdır (Holm 2008). Bu durumda Poisson çerçevesi (özel olarak Lie-Poisson çerçevesi olarak adlandırılır), $\mathbf{z} \in \mathfrak{K}^*$ için,

$$\{\mathcal{F}, \mathcal{H}\}(\mathbf{z}) = \pm \left\langle \mathbf{z}, \left[\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \mathbf{z}}, \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{z}}\right]\right\rangle$$

olarak verilir. Burada, denklemin sağ tarafındaki çerçeve $[\bullet,\bullet]$ Lie cebiri üzerindeki Lie çerçevesi, $\delta\mathcal{F}/\delta\mathbf{z}$, $\delta \mathrm{H}/\delta\mathbf{z}$ ise $\mathcal{F}$ ve $\mathcal{H}$ fonksiyonellerinin Fréchet türevleridir. Sonlu boyutta bu türevler kısmi türev olacaktır. Hareket denklemleri

$$\dot{\mathbf{z}} = \{\mathbf{z}, \mathcal{H}\}, \qquad \dot{z} = \pm ad^*_{\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{z}}} \mathbf{z} \tag{3}$$

olarak elde edilir. ad^* ile verilen Lie cebiri $\mathfrak{K}$'nin duali $\mathfrak{K}^*$ üzerindeki temsilidir ve her x, x' elemanı $\mathfrak{K}$ için $\langle ad^*_x \mathbf{z}, x'\rangle := -\langle \mathbf{z}, [x, x']\rangle$ şeklinde tanımlanır. Burada $ad_x x' = [x, x']$. Şimdi, $\mathfrak{K}$ Lie cebirini sonlu boyutlu kabul edelim ve bazlarını $\{\mathbf{e}_\mathrm{i}\}$ olarak sabitleyelim. Dolayısıyla $\mathfrak{K}$ uzayının dual uzayı olan $\mathfrak{K}^*$'ın bazlarını $\{\mathbf{e}^\mathrm{i}\}$ şeklinde alalım. Dual uzay $\mathfrak{K}^*$'ın bir elemanını $\mathbf{z} = z_i \mathbf{e}^i$ şeklinde gösteriyoruz. Lie-Poisson çerçevesi yerel koordinatlarda

$$\{\mathcal{F}, \mathcal{H}\} = \pm C^k_{ij} z_k \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta z_i} \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta z_j} \tag{4}$$

şeklinde ifade edilir. Burada, C^k_{ij} skaler büyüklükleri ise Lie algebra $\mathfrak{K}$ için yapı sabitleridir:

$$[\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j] = C^k_{ij} \mathbf{e}_k. \tag{5}$$

Denklem (4) ve (5) de bir önceki bölümde belirttiğimiz gibi toplama uylaşımı kullanmaya devam etmekteyiz. Denklem (3) doğrultusunda ve de denklem (4) kullanılarak Lie-Poisson hareket denklemi (3)

$$\dot{z}_j \mp C^k_{ij} z_k \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta z_i} = 0 \tag{6}$$

şeklinde elde edilir.

3.3 Rayleigh Tip Sönümleme

Öncelikle bir Lie-Poisson sistemine doğrusal (Rayleigh) tipi sönümleme eklemenin yöntemini belirleyelim. Bunun için Υ ile göstereceğimiz $\mathfrak{K}^*$'dan $\mathfrak{K}$'ye bir lineer dönüşüm tanımlayalım. $\mathbf{z} \in \mathfrak{K}^*$ olmak üzere, bir Hamilton fonksiyoneli $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbf{z})$ tarafından üretilen Lie-Poisson denklemlerinin sağ tarafına lineer bir sönümleme terimi olarak $\mp ad^*_{\Upsilon(\mathbf{z})} \mathbf{z}$ eklenerek

$$\dot{\mathbf{z}} \mp ad^*_{\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \mathbf{z}}} \mathbf{z} = \mp ad^*_{\Upsilon(\mathbf{z})} \mathbf{z} \tag{7}$$

Sönümlemeli denklemlere ulaşılır (Bloch et al. 1996). Genel hali denklem (7)'deki gibi olan sönümlemeli sistemleri yerel koordinatlarda yazmak mümkündür:

$$\dot{z}_j \mp C^k_{ij} z_k \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta z_i} = \mp \Upsilon^i z_l C^l_{ij}. \tag{8}$$

3.4 GENERIC (Metriplektik) Sistemler

Şimdi bir önceki bölümde değindiğimiz Lie cebiri $\mathfrak{K}^*$ üzerindeki Lie-Poisson çerçevesine ek olarak, yine $\mathfrak{K}^*$ üzerindeki fonksiyoneller üzerinde çalışacak bir simetrik çerçeve $(\bullet,\bullet)$ tanımlayalım.

Bir $\mathcal{S}$ fonksiyoneli tarafından üretilen bu tip dinamik sistem

$$\dot{\mathbf{z}} = (\mathbf{z}, \mathcal{S}) \tag{9}$$

olarak ifade edilir. Simetrik ve Lie-Poisson çerçevelerini toplayarak metriplektik çerçeveyi tanımlayalım (Kaufman 1984, Morrison 1984, Morrison 1986). $\mathcal{F}$ ve $\mathcal{H}$, $\mathfrak{K}^*$ üzerinde rasgele iki fonksiyonel olmak üzere, metriplektik çerçeve şu şekildedir:

$$[|\mathcal{F},\mathcal{H}|] = \{\mathcal{F},\mathcal{H}\} + (\mathcal{F},\mathcal{H}). \tag{10}$$

Bizim ilgi alanımıza giren metriplektik sistemler, iki fonksiyon $\mathcal{S}$ ve $\mathcal{H}$ tarafından üretilir

$$\dot{z} = \{z,\mathcal{H}\} + (z,\mathcal{S}). \tag{11}$$

Burada seçilen $\mathcal{S}$ ve $\mathcal{H}$ fonksiyonları için

$$\{\mathcal{S},\mathcal{H}\} = 0, \qquad (\mathcal{S},\mathcal{H}) = 0 \tag{12}$$

koşullarını sağlaması ise fiziksel olarak güzel sonuçlar verecektir. Bu koşullar sayesinde bu tip geometrik yapılar özellikle termodinamik sistemler için uygun bir çalışma alanı sunar. Dikkat edilirse, Hamilton fonksiyonu hareket boyunca korunur. Bu termodinamiğin ilk kanununa (enerjinin korunumuna) karşılık gelir. Entropi $\mathcal{S}$ için ise

$$\mathcal{S}_t = \{\mathcal{S},\mathcal{H}\} + (\mathcal{S},\mathcal{S}) \geq 0 \tag{13}$$

eşitsizliğinden termodinamiğin ikinci kanununa (entropinin sürekli artışına) varılır (Grmela 1984, Grmela ve Öttinger 1997).

3.5 Cartan-Killing Sönümlemesi

Bu bölümde Cartan'ın Lie cebirlerini sınıflandırmak için kullandığı iz formunu (Killing metriği diye de geçmektedir) Lie cebirleri üzerindeki sönümlemeye doğal bir metrik yazmak amacıyla kullanacağız (Morrison 2009).

Öncelikle sonlu boyutlu herhangi bir Lie cebiri için bu metriğin nasıl olduğunu göstermekle başlayalım. Bu amaç doğrultusunda, $\mathfrak{K}$ ile göstereceğimiz $\mathbb{R}$ cismi üzerinde tanımlı bir Lie cebirini ele alalım. Bu Lie cebiri için bir baz takımı $\{\mathbf{e}_\mathrm{i}\}$, ve denklem (5) ile gösterdiğimiz şekilde yapı sabitlerini C_{ij}^k seçelim. Cartan metriğini

$$g_{ij} = C_{il}^k C_{jk}^l \tag{14}$$

olarak tanımlayacağız. Burada ters simetri özelliği sabitler üzerinde $C_{ij}^k = -C_{ji}^k$ ilişkisini verecek bu sayede de g_{ij}'nin simetrik ve bilineer bir kovaryant tensör tanımladığı kolayca gösterilebilecektir.

Elde ettiğimiz Cartan metriğinden yola çıkarak dual uzay üzerindeki $\mathcal{F}$ ve $\mathcal{S}$ fonksiyonları için simetrik çerçeve

$$(\mathcal{F},\mathcal{S}) = \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial z_i} g_{ij} \frac{\partial\mathcal{S}}{\partial z_j} = C_{il}^k C_{jk}^l \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial z_i}\frac{\partial\mathcal{S}}{\partial z_j} \tag{15}$$

şeklinde verilir. Bu hesaptan hareketle $\mathcal{H}$ Hamilton fonksiyonu ve $\mathcal{S}$ entropi fonksiyonu tarafından üretilen metriplektik hareket denklemleri

$$\dot{z}_j \mp C_{ij}^k z_k \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial z_i} = C_{ji}^k C_{lk}^i \frac{\partial\mathcal{S}}{\partial z_l} \tag{16}$$

şeklinde olacaktır.

4 Eşlenmiş Sönümlemeli Sistemler

4.1 Eşlenmiş Lie Cebirleri

Şimdi tartışmamızı tek bir Lie cebiri yerine, karşılıklı etki tepki içindeki iki Lie cebiri için yapalım.

$\mathfrak{g}$ ve $\mathfrak{h}$ olarak göstereceğimiz iki Lie cebirini göz önüne alalım ve karşılıklı etki ettiklerini

$$\rhd : \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}, \quad \eta \otimes \xi \mapsto \eta \rhd \xi, \tag{17}$$

$$\lhd : \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}, \quad \eta \otimes \xi \mapsto \eta \lhd \xi, \tag{18}$$

kabul edelim. Bu durumda $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ direkt toplam uzayı üzerinde Lie cebiri yapısı tanımlamak mümkündür (Majid 1990, Majid 2000). Bu durumda toplam uzayını $\mathfrak{g} \bowtie \mathfrak{h}$ ile göstereceğiz ve adına eşlenmiş Lie cebiri diyeceğiz. Eşlenmiş cebir üzerindeki Lie çerçevesi ise

$$\begin{aligned}[(\xi_1,\eta_1),(\xi_2,\eta_2)] = ([\xi_1,\xi_2] + \eta_1 \rhd \xi_2 - \eta_2 \rhd \xi_1,\\ [\eta_1,\eta_2] + \eta_1 \lhd \xi_2 - \eta_2 \lhd \xi_1))\end{aligned} \tag{19}$$

olacaktır. Dikkat edilirse, Jacobi özdeşliği için uyumluluk şartlarının

$$\begin{aligned}(\,\eta \rhd [\xi_1,\xi_2]) &= [\eta \rhd \xi_1,\xi_2] + [\xi_1,\eta \rhd \xi_2] \\ &\quad + (\eta \lhd \xi_1) \rhd \xi_2 - (\eta \lhd \xi_2) \rhd \xi_1)\end{aligned} \tag{20}$$

$$([\eta_1,\eta_2] \lhd \xi) = [\eta_1,\eta_2 \lhd \xi] + [\eta_1 \lhd \xi,\eta_2]$$

$$+\eta_1 \lhd (\eta_2 \rhd \xi) - \eta_2 \lhd (\eta_1 \rhd \xi). \tag{21}$$

sağlanması gerektiği görülecektir. Eğer bir Lie cebiri eşlenmiş olarak ifade edilebilirse, karşılıklı etkiler aşağıdaki şekilde de hesaplanabilir

$$[\eta, \xi] = \eta \rhd \xi \oplus \eta \lhd \xi.$$

N-boyutlu $\mathfrak{g}$ Lie cebiri üzerinde $\alpha = 1, \dots, N$ olacak şekilde $\{e_\alpha\}$ baz takımını, M-boyutlu $\mathfrak{h}$ Lie cebiri üzerinde $a = 1, \dots, M$ olacak şekilde $\{f_a\}$ baz takımını seçelim. Bu iki cebir için sırasıyla, $C_{\alpha\beta}^{\gamma}$ ve C_{ab}^{d} ile verilecek yapı sabitlerini aşağıdaki Lie çerçeveleri marifetiyle belirleyelim:

$$C_{\alpha\beta}^{\gamma}\mathbf{e}_\gamma = [\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta], \qquad D_{ab}^{d}\mathbf{f}_d = [\mathbf{f}_a, \mathbf{f}_b].$$

Eşlenmiş Lie cebiri $\mathfrak{g} \bowtie \mathfrak{h}$ direkt toplam olduğundan $N + M$ boyutludur. Eşlenmiş cebir üzerinde

$$\bar{e}_1 = (e_1, 0), \dots, \bar{e}_N = (e_N, 0),$$
$$\bar{e}_{N+1} = (0, f_1), \dots, \bar{e}_{N+M} = (0, f_M)$$

ilişkilerini kullanarak bir baz takımı $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{N+M}\}$ tanımlayabiliriz. Eşlenmiş Lie çerçevesi (19), $\mathfrak{g}$'nin $\mathfrak{h}$'ye sol etkisinden ve de $\mathfrak{h}$'nin $\mathfrak{g}$'ye sağ etkisinden gelen terimler görülmektedir. Bu nedenle eşlenmiş Lie cebirleri için yapı sabitlerini elde ederken bu sağ ve sol etkilerden gelen terimler de gözükecektir.

Seçtiğimiz bazlar cinsinden sol etki $\rhd$ ve sağ etki $\lhd$'yi sırasıyla şu şekilde alalım:

$$\mathbf{f}_a \rhd \mathbf{e}_\alpha = L_{a\alpha}^{\beta}\mathbf{e}_\beta, \qquad \mathbf{f}_a \lhd \mathbf{e}_\alpha = R_{a\alpha}^{b}\mathbf{f}_b. \tag{22}$$

Burada $L_{a\alpha}^{\beta}$ ve $R_{a\alpha}^{b}$ skalerleri karşılıklı etkileri tek şekilde belirler. Şimdi eşlenmiş Lie cebirinin $\bar{C}$ ile göstereceğimiz yapı sabitlerini belirleyelim. Bunun için tüm ikililerin çerçevelerini hesap etmemiz gerekecek:

$$\begin{aligned}
[\bar{\mathbf{e}}_\beta, \bar{\mathbf{e}}_\alpha] &= \bar{C}_{\beta\alpha}^{\gamma}\bar{\mathbf{e}}_\gamma + \bar{C}_{\beta\alpha}^{a}\bar{\mathbf{e}}_a = [\mathbf{e}_\beta \oplus 0, \mathbf{e}_\alpha \oplus 0] \\
&= C_{\beta\alpha}^{\gamma}\mathbf{e}_\gamma \oplus 0 \\
[\bar{\mathbf{e}}_\beta, \bar{\mathbf{e}}_a] &= \bar{C}_{\beta a}^{\gamma}\bar{\mathbf{e}}_\gamma + \bar{C}_{\beta a}^{d}\bar{\mathbf{e}}_d = [\mathbf{e}_\beta \oplus 0, 0 \oplus \mathbf{f}_a] \\
&= -L_{a\beta}^{\gamma}\mathbf{e}_\gamma \oplus (-R_{a\beta}^{d}\mathbf{f}_d) \\
[\bar{\mathbf{e}}_b, \bar{\mathbf{e}}_a] &= \bar{C}_{ba}^{\gamma}\bar{\mathbf{e}}_\gamma + \bar{C}_{ba}^{d}\bar{\mathbf{e}}_d = [0 \oplus \mathbf{f}_b, 0 \oplus \mathbf{f}_a] \\
&= 0 \oplus D_{ba}^{d}\mathbf{f}_d.
\end{aligned} \tag{23}$$

Buradan çıkan sonuçları listeleyelim:

$$\begin{aligned}
\bar{C}_{\beta\alpha}^{\gamma} &= C_{\beta\alpha}^{\gamma}, \quad \bar{C}_{\beta\alpha}^{a} = 0, \quad \bar{C}_{\beta a}^{\gamma} = -L_{a\beta}^{\gamma} \\
\bar{C}_{\beta a}^{d} &= -R_{a\beta}^{d}, \quad \bar{C}_{ba}^{\gamma} = 0, \quad \bar{C}_{ba}^{d} = D_{ba}^{d}.
\end{aligned} \tag{24}$$

4.2 Dual Etkiler ve Koadjoint Temsil

Sol etki $\rhd$'de bir $\eta \in \mathfrak{h}$ elemanını sabit alalım. Bu durumda $\mathfrak{g}$ üzerinde bir lineer dönüşüm elde ederiz. Bu dönüşümün dualini ise şu şekilde belirleriz:

$$\overset{*}{\lhd}\eta : \mathfrak{g}^* \mapsto \mathfrak{g}^*, \qquad \left\langle \mu \overset{*}{\lhd} \eta, \xi \right\rangle = \langle \mu, \eta \rhd \xi \rangle.$$

Diğer bir yandan, bir $\xi \in \mathfrak{g}$'yi dondurarak

$$\mathfrak{b}_\xi : \mathfrak{h} \mapsto \mathfrak{g}, \qquad \mathfrak{b}_\xi(\eta) = \eta \rhd \xi$$

lineer dönüşümünü elde ederiz. Bu dönüşümün duali şu şekildedir:

$$\mathfrak{b}_\xi^* : \mathfrak{g}^* \mapsto \mathfrak{h}^*, \qquad \langle \mathfrak{b}_\xi^*\mu, \eta \rangle = \langle \mu, \mathfrak{b}_\xi \eta \rangle = \langle \mu, \eta \rhd \xi \rangle.$$

Benzer şekilde, sağ etki $\lhd$ için bir $\xi \in \mathfrak{g}$'yi dondurarak, $\mathfrak{h}$ üzerinde $\lhd \xi$ ile göstereceğimiz bir lineer dönüşüm elde ederiz. Bu dönüşüm duali:

$$\xi \overset{*}{\rhd} : \mathfrak{h}^* \mapsto \mathfrak{h}^*, \qquad \left\langle \xi \overset{*}{\rhd} \nu, \eta \right\rangle = \langle \nu, \eta \lhd \xi \rangle$$

olacaktır. Sağ etki $\lhd$ için bir $\eta \in \mathfrak{h}$ elemanını sabit alalım ve $\mathfrak{a}_\eta$ lineer dönüşümünü tanımlayalım

$$\mathfrak{a}_\eta : \mathfrak{g} \mapsto \mathfrak{h}, \qquad \mathfrak{a}_\eta(\xi) = \eta \lhd \xi.$$

Bunun duali:

$$\mathfrak{a}_\eta^* : \mathfrak{h}^* \mapsto \mathfrak{g}^*, \qquad \langle \mathfrak{a}_\eta^*(\nu), \xi \rangle = \langle \nu, \mathfrak{a}_\eta \xi \rangle = \langle \nu, \eta \lhd \xi \rangle$$

olacaktır.

Bu dönüşümler sayesinde $\mathfrak{g} \bowtie \mathfrak{h}$'nin $(\mathfrak{g} \bowtie \mathfrak{h})^*$ üzerine koadjoint temsili

$$ad^*_{(\xi,\eta)}\,(\mu,\nu) = (ad^*_\xi\,(\mu) - \mu \overset{*}{\vartriangleleft} \eta - \mathfrak{a}^*_\eta\,\nu,$$
$$ad^*_\eta\,(\nu) + \xi \overset{*}{\vartriangleright} \nu + \mathfrak{b}^*_\xi\,\mu) \qquad (25)$$

formunda hesap edilecektir (Esen ve Sütlü 2016). Bu sayede (tersinir) eşlenmiş Lie-Poisson hareket denklemleri de aşağıdaki şekilde hesap edilir:

$$\dot{\mu} = \pm ad^*_{\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\mu}}(\mu) \mp \mu \overset{*}{\vartriangleleft} \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\nu} \mp \mathfrak{a}^*_{\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\nu}}\nu,$$
$$\dot{\nu} = \pm ad^*_{\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\nu}}(\nu) \pm \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\mu} \overset{*}{\vartriangleright} \nu \pm \mathfrak{b}^*_{\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\mu}}\mu. \qquad (26)$$

Lie-Poisson hareket denklemlerini de yerel koordinatlarda yazmak mümkündür. Bu denklemler koordinatlarda şu şekildedir:

$$\dot{\mu}_\beta = \mp C^\gamma_{\alpha\beta}\mu_\gamma \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mu_\alpha} \mp L^\epsilon_{k\beta}\mu_\epsilon \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\nu_k} \mp R^m_{d\beta}\nu_m \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\nu_d}$$
$$\dot{\nu}_j = \mp D^k_{ij}\nu_k \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\nu_i} \pm R^d_{j\alpha}\nu_d \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mu_\alpha} \pm L^\theta_{j\rho}\mu_\theta \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mu_\rho} \qquad (27)$$

Önümüzdeki iki altbölümde sönümlemelerin eşlenmiş Lie cebirleri için nasıl elde edebileceğini tartışacağız.

4.3 Rayleigh Tipi Sönümlemelerin Eşlenmesi

Eşlenmiş Lie-Poisson uzayı $(\mathfrak{g}^* \bowtie \mathfrak{h}^*, \{\bullet,\bullet\}_{\mathfrak{g}^*\bowtie\mathfrak{h}^*})$ ile başlayalım ve sönümleme eklememizi sağlayacak bir lineer dönüşüm

$$\Lambda: \mathfrak{g}^* \bowtie \mathfrak{h}^* \longrightarrow \mathfrak{g} \bowtie \mathfrak{h}: (\mu,\nu) \mapsto \big(\Upsilon(\mu), \Phi(\nu)\big) \qquad (28)$$

ele alalım. Burada Υ ile gösterdiğimiz $\mathfrak{g}^*$'dan $\mathfrak{g}$'ye, Φ ile gösterdiğimiz ise $\mathfrak{h}^*$'dan $\mathfrak{h}$'ye bir lineer dönüşümdür. Denklem (7)'nin sağ tarafı ile verilen sönümleme terimi eşlenmiş Lie cebiri üzerinde

$$ad^*_{(\Lambda(\mu,\nu))}(\mu,\nu) = (ad^*_{\Upsilon(\mu)}\mu - \mu \overset{*}{\vartriangleleft} \Phi(\nu) - \mathfrak{a}^*_{\Phi(\nu)}\nu$$
$$, ad^*_{\Phi(\nu)}\nu + \Upsilon(\mu) \overset{*}{\vartriangleright} \nu + \mathfrak{b}^*_{\Upsilon(\mu)}\mu) \quad (29)$$

sönümleme terimini işaret edecektir. Bu durumda Rayleigh tipi sönümleme eklenmiş eşlenmiş Lie-Poisson denklemlerini

$$\begin{aligned}\dot{\mu} &= \pm ad^*_{\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\mu}}\mu \mp \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\mu} \overset{*}{\vartriangleleft} \nu \mp \mathfrak{a}^*_{\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\nu}}\nu \\ &\mp ad^*_{\Upsilon(\mu)}\mu \pm \mu \overset{*}{\vartriangleleft} \Phi(\nu) \pm \mathfrak{a}^*_{\Phi(\nu)}\nu \\ \dot{\nu} &= \pm ad^*_{\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\nu}}\nu \pm \frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\nu} \overset{*}{\vartriangleright} \mu \pm \mathfrak{b}^*_{\frac{\delta\mathcal{H}}{\delta\mu}}\mu \\ &\mp ad^*_{\Phi(\nu)}\nu \mp \Upsilon(\mu) \overset{*}{\vartriangleright} \nu \mp \mathfrak{b}^*_{\Upsilon(\mu)}\mu\end{aligned} \qquad (30)$$

olarak elde ederiz. Bu denklemleri yerel koordinatlarda şu şekilde yazmakta mümkündür:

$$\begin{aligned}\dot{\mu}_\beta = &\mp C^\gamma_{\alpha\beta}\mu_\gamma \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mu_\alpha} \mp L^\epsilon_{k\beta}\mu_\epsilon \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\nu_k} \mp R^m_{d\beta}\nu_m \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\nu_d}, \\ &\pm C^\pi_{\rho\beta}\mu_\pi\Upsilon^\rho \pm L^\gamma_{s\beta}\mu_\gamma\Phi^s \pm R^n_{r\beta}\nu_n\Phi^r\end{aligned} \qquad (31)$$

$$\begin{aligned}\dot{\nu}_j = &\mp D^k_{ij}\nu_k \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\nu_i} \pm R^d_{j\alpha}\nu_d \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mu_\alpha} \pm L^\theta_{j\rho}\mu_\theta \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\mu_\rho}. \\ &\pm D^m_{nj}\nu_m\Phi^n \mp \nu_s R^s_{j\beta}\Upsilon^\beta \mp \mu_\vartheta L^\vartheta_{j\pi}\Upsilon^\pi\end{aligned} \qquad (32)$$

4.4 Cartan-Killing Sönümlemesinin Eşlenmesi

Şimdi Cartan metriğini eşlenmiş Lie cebirleri için tanımlayıp, bu metrik yardımıyla bir simetrik çerçeve elde edelim. Bu amaç doğrultusundaki ilk adımımız eşlenmiş Lie cebiri üzerindeki yapı sabitlerini kullanmak olacak. Burada (33) ile verilen metrikleri kullanarak simetrik çerçeve kolaylıkla yazılabilir. $\mathfrak{g} \bowtie \mathfrak{h}$ eşlenmiş Lie cebiri için hesap ettiğimiz yapı sabitlerini kullanarak Cartan metriğinin eşlenmiş Lie cebiri üzerindeki ifadesini

$$\begin{aligned}\bar{g}_{\alpha b} &= -R^d_{a\alpha}D^a_{bd} - L^\beta_{k\alpha}R^k_{b\beta} + C^\gamma_{\alpha\beta}L^\beta_{b\gamma} \\ \bar{g}_{ab} &= L^\beta_{a\alpha}L^\alpha_{b\beta} + D^k_{ad}D^d_{bk} \\ \bar{g}_{\alpha\beta} &= L^\gamma_{a\alpha}C^\alpha_{\beta\gamma} - D^d_{ab}R^b_{d\beta} - R^b_{a\alpha}L^\alpha_{b\beta} \\ \bar{g}_{\alpha\beta} &= R^b_{a\alpha}R^a_{b\beta} + C^\epsilon_{\alpha\gamma}C^\gamma_{\beta\epsilon}\end{aligned} \qquad (33)$$

olarak elde ederiz. $\mathfrak{g}^* \oplus \mathfrak{h}^*$ üzerinde tanımlı iki fonksiyon $\mathcal{F}$ ve $\mathcal{H}$ için simetrik çerçeve şu şekilde hesap edilir:

$$(\mathcal{F},\mathcal{H}) = \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\mu_\alpha}\bar{g}_{\alpha b}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\nu_b} + \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\mu_\gamma}\bar{g}_{\gamma\beta}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\nu_\beta} +$$
$$\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\mu_a}\bar{g}_{a\pi}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\nu_\pi} + \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial\mu_d}\bar{g}_{dk}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\nu_k}.$$

Buradan yola çıkarak, sadece bu metrik ile üretilen sönümlemeli hareket denklemleri

$$\begin{aligned} \dot{\mu}_\rho &= \bar{g}_{\rho a}\frac{\partial S}{\partial \nu_a} + \bar{g}_{\rho\alpha}\frac{\partial S}{\partial \mu_\alpha} \\ \dot{\nu}_u &= \bar{g}_{u\beta}\frac{\partial S}{\partial \mu_\beta} + \bar{g}_{ub}\frac{\partial S}{\partial \nu_b} \end{aligned} \tag{34}$$

şeklinde elde edilir. Lie-Poisson denklemleri ile bu sönümlemelerden elde ettiğimiz terimleri bir arada da yazalım:

$$\begin{aligned} \dot{\mu}_\beta &= \mp C_{\alpha\beta}^{\gamma}\mu_\gamma\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mu_\alpha} \mp L_{k\beta}^{\epsilon}\mu_\epsilon\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \nu_k} \mp R_{d\beta}^{m}\nu_m\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \nu_d} \\ &\quad + \bar{g}_{\beta a}\frac{\partial S}{\partial \nu_a} + \bar{g}_{\beta\alpha}\frac{\partial S}{\partial \mu_\alpha} \\ \dot{\nu}_j &= \mp D_{ij}^{k}\nu_k\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \nu_i} \pm R_{j\alpha}^{d}\nu_d\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mu_\alpha} \pm L_{j\rho}^{\theta}\mu_\theta\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mu_\rho} \\ &\quad + \bar{g}_{j\beta}\frac{\partial S}{\partial \mu_\beta} + \bar{g}_{jb}\frac{\partial S}{\partial \nu_b}. \end{aligned} \tag{35}$$

5. Uygulamalar

Bu bölümde elde ettiğimiz teorik sonuçların direkt olarak uygulamaları, diğer bir ifade ile verilen bir denklem takımının metriplektik analizini gerçekleştirmeye çalışacağız. Geniş bir uygulama alanına hitap etmesine rağmen bu kısıtlı yerimizde benzer problemlere sahip biri 3 bağımlı değişken

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2yz - xy, \\ \dot{y} &= x^2 + 2(\log y + 1) - z^2, \\ \dot{z} &= zy - 2yx, \end{aligned} \tag{36}$$

diğeri 4 bağımlı değişken içeren

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2xy - yu \\ \dot{y} &= 4(\log y + 1) + 2x^2 - 2uv \\ \dot{u} &= yx \\ \dot{v} &= 2uy. \end{aligned} \tag{37}$$

adi diferansiyel denklem takımlarını düşünelim. Bu denklemleri üreten vektör alanlarına tek tek bakıldığında her ikisi içinde üretici vektör alanlarının diverjanslarının sıfırdan farklı olduğu açıkça görülecektir. Her iki denklem takımı içinde diverjansın sıfır olmasını bozan terim $(\log y + 1)$' li terimdir.

Denklemler bu halleri ile eşlenmiş sönümlemeli sistemlere örnek teşkil etmektedir. Bunun için öncelikle diverjansın sıfır olmasını bozan $(\log y + 1)$ terimlerinin sistemden çıkarılması, Hamilton analizlerinin yapılması ve sonra bir simetrik çerçeve marifetiyle bu terimin tekrardan eklenmesi gerekecektir. Burada fark edilmesi gereken durum elde edilen bu Hamilton sistemin aynı zamanda başka iki Hamilton sistemin eşlenmesi oluşudur. Önümüzdeki alt bölümlerde sırasıyla iki Lie cebirinden başlayıp bunların eşlenmesi vasıtasıyla yukarıdaki denklemlere nasıl ulaşılacağını göstereceğiz.

5.1 3 Boyutlu Eşlenmiş Sönümlemeli Sistem

Bu örneğimize 3 boyutlu bir eşlenmiş Lie cebirini inceleyerek başlayacağız ve bu Lie cebirini 2-boyutlu ve 1-boyutlu iki Lie altcebirinin eşlenmesi şeklinde sunacağız. Notasyonumuza sadık kalmak adına ilk Lie cebirini $\mathfrak{g} = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$, yani $\mathbf{e}_1$ ve $\mathbf{e}_2$ tarafından üretilen uzay, olarak gösterirken diğer Lie cebirini $\mathfrak{h} = \langle \mathbf{f} \rangle$, yani $\mathbf{f}$ tarafından üretilen uzay, ile gösterelim. Burada uzayın tek bir eleman içermesi nedeniyle indis kullanılmamıştır. Ve fakat hesapları okuyucunun kolay takibi açısından gerektiğinde $\mathbf{f}_1$ olarak kullanılmasında bir beis bulunmamaktadır. $\mathfrak{g}$ üzerindeki Lie çerçevesini

$$[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] = \mathbf{e}_1 \tag{38}$$

şeklinde tanımlayalım. $\mathfrak{h}$ üzerindeki Lie çerçevesi ise sıfır olacaktır. Bu tanımlamalardan hareketle $\mathfrak{g}$ uzayında sıfırdan farklı yapı sabiti $C_{12}^1 = 1$ ve $\mathfrak{h}$ için aşikâr Lie cebiri yapısı nedeniyle $D_{ab}^d = 0$ olacaktır.

Şimdi bu iki Lie cebirinin birbirleri üzerine temsilleri (etkileri) olsun ve denklem (17) notasyonu uyarınca şu şekilde yazılsınlar:

$$\mathbf{f} \rhd \mathbf{e}_1 = 2\mathbf{e}_2 \quad ve \quad \mathbf{f} \lhd \mathbf{e}_2 = -\mathbf{f}. \tag{39}$$

Bu etkiler için etki sabitleri

$$C_{12}^1 = 1, \quad L_{11}^2 = 2, \quad R_{12}^1 = -1. \tag{40}$$

şeklinde elde edilir.

Bölüm (3.2)'deki dual etkileri yazmamız gerekecek. Bahsi geçen bölüm de olduğu gibi $\xi = \xi^1 e_1 + \xi^2 e_2 \in \mathfrak{g}$, dual eleman $\mu = \mu_1 e^1 + \mu_2 e^2 \in \mathfrak{g}^*$ olarak alınsın. Diğer yandan $\mathfrak{h}$ uzayı 1-boyutlu olduğundan $\eta \in \mathfrak{h}$ ve $\nu \in \mathfrak{h}^*$ hem vektörü hem de koordinatı göstersin. Gerekli işlemler yapıldığında dual etkileri şu şekildedir:

$$\begin{aligned} \mu \overset{*}{\lhd} \eta \quad &= 2\mu_2 \eta \mathbf{e}^1, \quad \mathfrak{b}_\xi^* \mu = 2\mu_2 \xi^1 \mathbf{f}^1, \\ \xi \overset{*}{\rhd} \nu \quad &= -2\nu \xi^2 \mathbf{f}^1, \quad \mathfrak{a}_\eta^* \nu = -2\nu\eta \mathbf{e}^2 \end{aligned} . \tag{41}$$

Bu hesaplardan ve de yerel koordinatlarda yazmış olduğumuz eşlenmiş Lie-Poisson (27) denklemlerinden faydalanarak bu örnek için eşlenmiş Lie-Poisson denklemlerini

$$\begin{aligned} \dot{\mu}_1 \quad &= 2\mu_2 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \nu} - \mu_1 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mu_2}, \\ \dot{\mu}_2 \quad &= \mu_1 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mu_1} - \nu \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \nu}, \\ \dot{\nu} \quad &= \nu \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mu_2} - 2\mu_2 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mu_1}. \end{aligned} \tag{42}$$

şeklinde hesap ederiz. Burada özel olarak Hamilton fonksiyonunu $\mathcal{H} = (1/2)(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \nu^2)$ şeklinde seçelim. Bir önceki denklemden yararlanarak eşlenmiş Lie-Poisson denklemlerini bu özel seçilen Hamiltonyen için tekrar yazalım:

$$\begin{aligned} \dot{\mu}_1 &= 2\mu_2 \nu - \mu_1 \mu_2, \\ \dot{\mu}_2 &= \mu_1 \mu_1 - \nu\nu, \\ \dot{\nu} &= \nu \mu_2 - 2\mu_2 \mu_1. \end{aligned} \tag{43}$$

Denklemleri daha rahat okuyabilmek adına son kez bir özel seçim daha yapalım, $x := \mu_1, y := \mu_2, z := \nu$. Bu seçimle beraber denklem (43) şu şekilde görünecektir:

$$\begin{aligned} \dot{x} \quad &= 2yz - xy \\ \dot{y} \quad &= x^2 - z^2 \\ \dot{z} \quad &= zy - 2yx. \end{aligned} \tag{44}$$

Eşlenmiş Lie cebiri için elde ettiğimiz yapı sabitleri (40) kullanılarak Cartan-Killing metriği (33):

$$\begin{aligned} g_{\alpha b} \quad &: g_{11} = 4, \quad g_{ab} = 0 \\ g_{a\beta} \quad &: g_{11} = 4, \quad g_{\alpha\beta} : g_{22} = 2 \end{aligned} \tag{45}$$

şeklinde elde edilir. Bu metrikleri ise denklem (34)'te yerlerine koyarak hareket denklemlerini elde ederiz. Bu işlem neticesinde tersinir olmayan hareket denklemi

$$\dot{\mu}_1 = 4 \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \nu}, \ \dot{\mu}_2 = 2 \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mu_2}, \dot{\nu} = 4 \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mu_1} \tag{46}$$

olacaktır. Bu hareket denklemini eşlenmiş Lie-Poisson denklemlerine ekleyerek sönümlemeli eşlenmiş Lie-Poisson denklemlerine (35) ulaşırız:

$$\begin{aligned} \dot{\mu}_1 \quad &= 2\mu_2 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \nu} - \mu_1 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mu_2} + 4 \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \nu}, \\ \dot{\mu}_2 \quad &= \mu_1 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mu_1} + 2 \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mu_2} - \nu \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \nu}, \\ \dot{\nu} \quad &= \nu \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mu_2} - 2\mu_2 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mu_1} + 4 \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mu_1} \end{aligned} \tag{47}$$

Entropi fonksiyonunu $\mathcal{S} = ylogy$ olarak seçerek ana denklemimiz (36)'ya ulaşmış oluruz. $\mathcal{S} = ylogy$ enformasyon teorisinde Shannon entropisi olarak bilinmektedir (Shannon 1948).

Rayleigh sönümlemesini elde edebilmek için Denklem (31) ve (32)'deki yerel koordinatlarda yazılmış olan Rayleigh sönümlemesinden yararlanılacaktır:

$$\begin{aligned} \dot{\mu}_1 &= \mu_1 \Upsilon^2 - 2\mu_2 \Phi^1, \\ \dot{\mu}_2 &= -\mu_1 \Upsilon^1 + \nu \Phi^1, \\ \dot{\nu} &= -\nu \Upsilon^2 + 2\mu_2 \Upsilon^1 \end{aligned} \tag{48}$$

Buradaki Υ^i ve Φ^j'ler denklem (28)'deki doğrusal dönüşümlerin koordinatlarını ifade etmektedir.

5.2 4 Boyutlu Eşlenmiş Sönümlemeli Sistem

Bu ikinci örneğimizde ise 4-boyutlu bir eşlenmiş Lie cebirini çalışacağız. Burada ise eşlenecek olan Lie alt cebirleri 2-boyutludur. İlk Lie cebirini $\mathfrak{g} = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle$ şeklinde seçerken ikinci Lie cebirini $\mathfrak{h} = \langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \rangle$ şeklinde seçiyoruz. Bu örneğimizde ise $\mathfrak{g}$ üzerindeki Lie çerçevesi

$$[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] = 2\mathbf{e}_1 \tag{49}$$

şeklinde tanımlayalım. $\mathfrak{h}$ üzerindeki Lie çerçevesi ise sıfır olacak şekilde seçelim. Burada sağ ve sol etkiler;

$$\mathbf{f}_1 \rhd \mathbf{e}_1 := -\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{f}_2 \lhd \mathbf{e}_2 := -2\mathbf{f}_1 \tag{50}$$

şeklindedir. Bu tanımlamalardan elde ettiğimiz yapı sabitlerini

$$C_{12}^1 = 2, \quad L_{11}^2 = -1, \quad R_{22}^1 = -2 \tag{51}$$

şeklinde özetleyelim.

Bu örneğimizde de bir önceki örnekle benzer süreçleri işleteceğiz. Öncelikle eşlenmiş Lie cebiri için Lie-Poisson denklemlerini yazmak ile başlayalım. Bunun için yerel koordinatlarda genel halini vermiş olduğumuz denklemleri bu durum için özel olarak elde edilmiş olan yapı sabitlerine göre yazmak gerekir. Bu bahsi geçen işlem gerçekleştiğinde eşlenmiş Lie-Poisson hareket denklemleri (27)

$$\begin{aligned}
\dot{\mu}_1 &= -2\mu_1 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mu_2} - \mu_2 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \nu_1}, \\
\dot{\mu}_2 &= 2\mu_1 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mu_1} - 2\nu_1 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \nu_2} \\
\dot{\nu}_1 &= \mu_2 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mu_1}, \\
\dot{\nu}_2 &= 2\nu_1 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mu_2}
\end{aligned} \tag{52}$$

şeklinde karşımıza çıkacaktır.

Özel seçimler yapalım. Öncelikle Hamilton fonksiyonunu $\mathcal{H} = \frac{1}{2}(\mu_1^2 + \mu_2^2 + \nu_1^2 + \nu_2^2)$ olarak seçelim. Bu durumda denklem (52) açıkça görülecektir ki

$$\begin{aligned}
\dot{\mu}_1 &= -2\mu_1\mu_2 - \mu_2\nu_1, \\
\dot{\mu}_2 &= 2\mu_1\mu_1 - 2\nu_1\nu_2 \\
\dot{\nu}_1 &= \mu_2\mu_1, \\
\dot{\nu}_2 &= 2\nu_1\mu_2
\end{aligned} \tag{53}$$

halini alacaktır. Ayrıca, $\mu_1 =: x$, $\mu_2 =: y$, $\nu_1 =: u$, $\nu_2 =: v$ şeklinde seçilirse (53)

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= -2xy - yu, \\
\dot{y} &= 2x^2 - 2uv, \\
\dot{u} &= yx, \\
\dot{v} &= 2uy
\end{aligned} \tag{54}$$

şeklinde karşımıza çıkacaktır.

Cartan-Killing metriğinden gelen denklemlere bakalım. Denklemleri yazabilmek için metrikleri hesap edelim:

$$g_{\alpha b}: g_{11} = -2, g_{12} = -2, \quad g_{ab} = 0, \quad g_{\alpha\beta}: g_{11} = -2, g_{21} = -2 \quad g_{\alpha\beta}: g_{22} = 4 \tag{55}$$

Metrikleri denklem (34)'deki uygun yerlerine koyarsak bir önceki örnekte olduğu gibi sonuç

$$\dot{\mu}_1 = -2\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \nu_1} - 2\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \nu_2}, \quad \dot{\mu}_2 = 4\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mu_2}, \quad \dot{\nu}_1 = -2\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mu_1}, \quad \dot{\nu}_2 = -2\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mu_1} \tag{56}$$

çıkacaktır. Entropi fonksiyonunu bir önceki örnekte olduğu gibi $\mathcal{S} = ylogy$ olarak seçersek denklem (54)'deki özel seçimler için sönümlemeli eşlenmiş Lie-Poisson denklemleri (35), girişte bahsi geçen denklem (37)'yi verecektir.

Rayleigh sönümlemesi için dual etkileri Lie-Poisson denklemlerine ekleyeceğiz. Bölüm (3.2)'deki dual etkiler

$$\mu \overset{*}{\lhd} \eta = -\mu_2\eta^1\mathbf{e}^1, \quad \mathfrak{b}_\xi^*\mu = -\mu_2\xi^1\mathbf{f}^1, \tag{57}$$

$$\xi \overset{*}{\rhd} \nu = -2\nu_1\xi^2\mathbf{f}^1, \quad \mathfrak{a}_\eta^*\nu = -2\nu_1\eta^1\mathbf{e}^2 \tag{58}$$

şeklinde hesap edilir. Denklem (31) ve (32)'deki yerel koordinatlarda yazılmış olan Rayleigh sönümlemesinden yararlanarak bu özel durum için hesap edelim:

$$\begin{aligned}
\dot{\mu}_1 &= 2\mu_1\Upsilon^2 + \mu_2\Phi^1, \\
\dot{\mu}_2 &= -2\mu_1\Upsilon^1 + 2\nu_1\Phi^1, \\
\dot{\nu}_1 &= -\mu_2\Upsilon^1, \\
\dot{\nu}_2 &= -2\nu_1\Upsilon^2.
\end{aligned} \tag{59}$$

Teşekkür

Bu çalışma TÜBİTAK, 117F426 numaralı "Eşlenmiş Lagrange ve Hamilton Sistemleri" isimli projenin bir parçasıdır. Destek için TÜBİTAK'a teşekkür ederiz.

Etik Beyanı

Bu çalışmada, "Yükseköğretim Kurumları Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiği Yönergesi" kapsamında uyulması gerekli tüm kurallara uyulduğunu, bahsi geçen yönergenin "Bilimsel Araştırma ve Yayın Etiğine Aykırı Eylemler" başlığı altında belirtilen eylemlerden hiçbirinin gerçekleştirilmediğini taahhüt ederiz.

6. Kaynaklar

Bloch, A., Krishnaprasad, P. S., Marsden, J. E. and Ratiu, T. S., 1996. The Euler-Poincaré equations and double bracket dissipation. *Communications in Mathematical Physics.*, 175**, 1**, 1-42.

Esen, O. and Sütlü, S. 2016. Hamiltonian dynamics on matched pairs. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 13**, 10**, 1650128.

Esen, O. and Sütlü, S. 2017. Lagrangian dynamics on matched pairs. *Journal of Geometry and Physics,* 111, 142-157.

Esen, O., Kudeyt, M. and Sütlü, S. 2021. Second order Lagrangian dynamics on double cross product groups. *Journal of Geometry and Physics,* 159, 103934.

Esen, O. and Sütlü, S. 2021. Discrete dynamical systems over double cross-product Lie groupoids. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*. https://doi.org/10.1142/S0219887821500572

Grmela, M., 1984a. Bracket formulation of dissipative fluid mechanics equations. *Physics Letters A*, 102**, 8**, 355–358.

Grmela, M., 1984b. Particle and bracket formulations of kinetic equations. *Contemp. Math*, 28, 125-132.

Grmela, M. and Öttinger, H. C., 1997. Dynamics and thermodynamics of complex fluids. I. Development of a general formalism. *Physical Review E*, 56**, 6**, 6620.

Holm, D. D. 2011. Geometric Mechanics Part I: Dynamics and Symmetry. World Scientific Publishing Company.

Kaufman, A. N. 1984. Dissipative Hamiltonian systems: a unifying principle. *Physics Letters A*, 100**, 8**, 419-422.

de León, M. and Rodrigues, P. R., 2011. Methods of differential geometry in analytical mechanics. *Elsevier.*

Majid, S., 1990. Matched pairs of Lie groups associated to solutions of the Yang-Baxter equations. *Pacific Journal of Mathematics*, 141**, 2**, 311-332.

Majid, S., 2000. Foundations of Quantum Group Theory. Cambridge University Press.

Marsden, J. E. and Ratiu, T. S., 2013. Introduction to mechanics and symmetry: a basic exposition of classical mechanical systems. Springer Science & Business Media*,* 17**.**

Mielke, A., 2011. Formulation of thermoelastic dissipative material behavior using GENERIC. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 23, **3**, 233-256.

Morrison, P. J., 1984. Bracket formulation for irreversible classical fields. *Physics Letters A*, 100**, 8**, 423-427.

Morrison, P. J., 1986. A paradigm for joined Hamiltonian and dissipative systems. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 18**, 1-3**, 410-419.

Morrison, P. J., 2009. Thoughts on brackets and dissipation: old and new. *Journal of Physics: Conference Series IOP Publishing*, 169**, 1**.

Pavelka, M., Klika, V. and Grmela, M., 2018. Multiscale thermo-dynamics: introduction to GENERIC. Walter de Gruyter.

Shannon, C. E., 1948. A mathematical theory of communication. 27, J. L. Doob, The Bell System Technical Journal **,** 379-423.

Şuhubi, E. S. 2008. Dış Form Analizi. Türkiye Bilimler Akademisi.